

Hall-Effekt

Herleitung der Lorentzkraft auf ein Elektron

Skizze wie im Buch S. 210 (V1)

Wenn Elektronen sich in einem elektrischen Feld in einem elektrischen Leiter befinden, werden sie ständig beschleunigt. Sie erreichen jedoch nur eine sehr geringe Geschwindigkeit, weil sie häufig mit den Atomen zusammenstoßen und dabei (Bewegungs-)Energie an die Atome abgeben oder ihre Richtung ändern. Wir gehen also davon aus, dass sich Elektronen im elektrischen Leiter mit konstanter Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ ($\Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$) bewegen. In der Realität ist diese Driftgeschwindigkeit im Bereich von einigen mm/s.

Wenn sich N Elektronen in der Zeit t durch den Querschnitt eines elektrischen Leiters bewegen, entspricht dies dem Strom

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{t} \quad (1)$$

Setzt man die Driftgeschwindigkeit zusammen mit einer Messstrecke s in der sich die N Elektronen befinden ein, so erhält man für den Strom

$$I = \frac{N \cdot e \cdot v}{s} \quad (2)$$

Das Leiterstück der Länge s erfährt im Magnetfeld die Kraft $F = I \cdot s \cdot B$. Es ergibt sich als Gesamtkraft:

$$F = N \cdot e \cdot v \cdot B \quad (3)$$

Diese Formel gilt für N Elektronen und für ein einzelnes Elektron wird diese Kraft Lorentzkraft genannt:

$$F_{\text{Lorentz}} = e \cdot v \cdot B \quad (4)$$

Herleitung der Hallspannung

Unter Ausnutzung der oben hergeleiteten Kraft, kann die Ablenkung von Elektronen im Magnetfeld genutzt werden, um die Größe des Magnetfeldes messtechnisch zu bestimmen.

Wird ein Plättchen wie in der Abbildung in ein Magnetfeld gebracht, werden die Elektronen auf ihrem Weg durch das Plättchen auch nach unten abgelenkt. Dies dauert jedoch nur kurze Zeit, da die dann unten im Überschuss befindlichen Elektronen ein elektrisches Feld bewirken, dass die Elektronen wieder geradlinig durch das Plättchen fließen lässt. Ist dies der Fall, herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen der Kraft des elektrischen Feldes F_{el} und der Lorentzkraft F_{L} . Das elektrische Feld lässt sich durch Messung der Potentialdifferenz zwischen oberem und unterem Plättchenrand bestimmen.

Es gilt:

$$F_{\text{el}} = E \cdot e \quad (5)$$

$$F_{\text{L}} = e \cdot v \cdot B \quad (6)$$

$$F_{\text{el}} = F_{\text{L}} \quad (7)$$

Daraus folgt $E = v \cdot B$. Für das elektrische Feld in dem Plättchen gilt analog wie im Plattenkondensator:

$$E = \frac{U_{\text{Hall}}}{h} \Leftrightarrow U_{\text{Hall}} = E \cdot h \quad (8)$$

Damit kann die Hallspannung berechnet werden zu

$$U_{\text{Hall}} = B \cdot v \cdot h \quad (9)$$

In der Regel kennt man die Driftgeschwindigkeit v nicht. Man muss sie durch eine besser messbare Größe zu ersetzen versuchen. Bis jetzt haben wir mit der Elektronenanzahl N gerechnet. Jetzt führen wir die Elektronendichte $n = \frac{N}{V}$ ein. Sie gibt an, wie viele Elektronen in einem bestimmten Volumen vorhanden sind. Als Volumen V nehmen wir $V = A \cdot s$ an, wobei A die Querschnittsfläche des Plättchens ist. Jetzt wird die Elektronendichte eingesetzt:

$$I = \frac{N \cdot e \cdot v}{s} \quad (10)$$

$$= \frac{n \cdot V \cdot e \cdot v}{s} \quad (11)$$

$$= \frac{n \cdot A \cdot s \cdot e \cdot v}{s} \quad (12)$$

$$= n \cdot A \cdot e \cdot v \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{I}{n \cdot A \cdot e} \quad (14)$$

Setzen wir dies in die Gleichung 9 für die Hallspannung ein, so ergibt sich:

$$U_{\text{Hall}} = B \cdot \frac{I}{n \cdot A \cdot e} \cdot h \quad (15)$$

$$= \frac{B \cdot h \cdot I}{n \cdot e \cdot A} \quad A = d \cdot h \quad (16)$$

$$= \frac{1}{n \cdot e} \frac{B \cdot I}{d} \quad (17)$$

Interpretation der Formel der Hallspannung

Die Hallspannung ist sehr klein. Damit sie groß wird, kann man einige messtechnische Optimierungen vornehmen:

1. Der Strom I muss möglichst groß gewählt werden.
2. Die Dicke d des Plättchens muss möglichst klein gewählt werden.
3. Die Dichte der Ladungsträger n in dem Material muss möglichst klein sein. Dies ist bei Halbleitern der Fall, die keine freien Elektronen wie Metalle enthalten.

(18)